

University of Groningen

Convolution on homogeneous spaces

Capelle, Johan

IMPORTANT NOTE: You are advised to consult the publisher's version (publisher's PDF) if you wish to cite from it. Please check the document version below.

Document Version

Publisher's PDF, also known as Version of record

Publication date:

1996

[Link to publication in University of Groningen/UMCG research database](#)

Citation for published version (APA):

Capelle, J. (1996). *Convolution on homogeneous spaces*. s.n.

Copyright

Other than for strictly personal use, it is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

The publication may also be distributed here under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license. More information can be found on the University of Groningen website: <https://www.rug.nl/library/open-access/self-archiving-pure/taverne-amendment>.

Take-down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Downloaded from the University of Groningen/UMCG research database (Pure): <http://www.rug.nl/research/portal>. For technical reasons the number of authors shown on this cover page is limited to 10 maximum.

Samenvatting

Het is reeds lang bekend dat een periodiek signaal zich laat voorstellen als superpositie van eenvoudige signalen. Men denke hierbij aan geluidsgolven: klanken voortgebracht door bijvoorbeeld een piano kunnen zeer ingewikkeld zijn, maar kunnen steeds worden gezien als opgebouwd uit eenvoudige signalen. De wiskundige analyse van dit verschijnsel noemt men *Fourier Analyse*.

Dit proefschrift behandelt een aantal onderwerpen uit de *Harmonische Analyse*, een soort gegeneraliseerde Fourier Analyse. Ruwweg komt het er op neer dat men hierbij in een algemene context bepaalde objecten (functies of distributies, of ruimtes daarvan) met een bepaalde eigenschap (zoals periodiciteit) probeert te ontbinden in *minimale* objecten met diezelfde eigenschap.

Minimaal wil hier zeggen dat de desbetreffende objecten niet verder ontbonden kunnen worden. De twee hoofdkwesties zijn die van het *beschrijven* van dergelijke ontbindingen, en die van de *eenduidigheid* ervan. In het geval van periodieke functies is de ontbinding eenduidig, maar dit hoeft in het algemeen niet zo te zijn.

In dit proefschrift is bij de bestudering van deze kwesties voornamelijk gekozen voor een benadering met behulp van *convolutie*. Dit is een proces waarbij men door verstrengeling van een tweetal objecten (functies, distributies) een nieuw soortgelijk object maakt. Een deel van het proefschrift bestaat uit bestudering van de eigenschappen van convolutie, en van de wijze waarop men dit kan laten functioneren binnen de Harmonische Analyse.

Voor een verdere beschrijving van de inhoud van het proefschrift zullen we enkele termen invoeren. Men beschouwt in het algemeen een *variëteit* (om de gedachten te bepalen kan men hierbij denken aan een geometrisch object zoals een boloppervlak) die onderhevig is aan de werking van een *groep* (bij het voorbeeld van het boloppervlak is de geassocieerde groep die van draaiingen in de ruimte). Men neemt aan dat de variëteit onder deze werking *homogeen* is, wat wil zeggen dat men door de werking van de groep vanuit elk punt elk ander punt kan bereiken: de ruimte ziet er dan op alle plaatsen hetzelfde uit (bij het voorbeeld van het boloppervlak is dit duidelijk het geval). Convolutie is nu geassocieerd met objecten (zoals functies of *distributies*) die ongevoelig zijn voor een deelklasse van de genoemde transformaties: men noemt deze onveranderlijke objecten *zonaal*

(bij het boloppervlak zullen dit objecten zijn die (ruwweg) alleen afhangen van de afstand tot de noordpool; dergelijke objecten zijn ongevoelig voor draaiingen rond de verticale draai-as).

Om convolutie te begrijpen is het dus van belang om de zonale objecten te bepalen. Een belangrijk deelprobleem waar het proefschrift over handelt is de bepaling van zonale objecten die zelf weer leven op zonale deelvariëteiten. Het is erg lastig om met deze objecten te rekenen. De eerste drie hoofdstukken zijn een technische uiteenzetting waarin uiteindelijk deze objecten in een gedaante worden gebracht die het mogelijk maakt om zeer precies het gedrag van deze objecten onder de werking van bepaalde groepen van transformaties te bepalen.

Het vierde hoofdstuk beschrijft dan in het algemeen het convolutieproduct, en brengt dit in verband met studie van zogenaamde *Hilbertdeelruimtes van distributies*. De *distributies* leven hierbij op de variëteit, de *Hilbertdeelruimtes* zijn eindig of oneindig dimensionale ruimtes hiervan voorzien van een Hilbert inproduct. Deze Hilbertdeelruimtes zijn in de Harmonische Analyse (althans in onze benaderingswijze) de objecten waarvan men het gedrag onder de desbetreffende groep van transformaties wil bepalen. Bestudeerd wordt of en hoe men Hilbertdeelruimtes die ongevoelig (*invariant*) zijn voor de groepsactie kan ontbinden in Hilbertdeelruimtes die *minimaal* invariant zijn, en of dergelijke ontbindingen eenduidig zijn. Convolutie speelt in onze benaderingswijze hierbij een grote rol. Tenslotte beschrijven we hoe convolutie een rol speelt bij *inductie*, een proces waarbij men uit eenvoudige Hilbertdeelruimtes van distributies veel gecompliceerdere Hilbertdeelruimtes kan maken.

In de laatste drie hoofdstukken worden speciale gevallen bestudeerd. In hoofdstuk 5 bewijzen we enkele stellingen over convolutie op een speciale homogene ruimte, om precies te zijn de ruimte G/N , waarbij G een reële semi-simpele groep is, en N een maximaal nilpotente ondergroep. Hierbij gebruiken we de resultaten uit hoofdstuk 1-4. In de hoofdstukken 5 en 6 wordt de actie van $SL(n; \mathbb{R})$ op de Euclidische ruimte \mathbb{R}^n bestudeerd. We leiden af dat voor dimensie 3 en hoger men eenduidige ontbinding van Hilbertdeelruimtes heeft. Voor dimensie 2 is de zaak gecompliceerder: er is geen eenduidige ontbinding. Wel bepalen we alle invariante Hilbertdeelruimtes (in de vorm van bepaalde distributies), en beschouwen bepaalde deelklassen van invariante Hilbertdeelruimtes. Binnen tenminste één daarvan tonen we wel eenduidigheid van ontbinding aan.

Nawoord

What we call the beginning is often the end
And to make an end is to make a beginning.
The end is where we start from.

T. S. Eliot, *The Four Quartets*

Er rest mij alleen nog een aantal mensen te bedanken zonder wie de voorgaande uiteenzetting nooit tot stand, of nooit tot een einde zou zijn gekomen.

Allereerst wil ik Erik Thomas bedanken voor zijn niet aflatend enthousiasme, het steeds geven van nieuwe impulsen, en voor zijn bereidheid mij op elk gewenst tijdstip te woord te staan. Mannes Poel bedank ik voor het vele dat hij mij heeft geleerd op het gebied van de Harmonische Analyse, de samenwerking in de eerste fase, en voor zijn hernieuwde medewerking in de laatste tijd. De professoren Duistermaat, van Dijk, en Faraut ben ik erkentelijk ik voor het op korte termijn lezen van een wat lijvig uitgevallen proefschrift.

Dan was ik blij met de belangstelling en ondersteuning die ik steeds heb ondervonden van de kant van het instituut. In het bijzonder bedank ik Anne van Streun voor de gelegenheid die hij mij bood gebruik te maken van zijn PowerPC en printer. Verder is de huidige goede sfeer op de werkvloer niet in de laatste plaats aan de nieuwe groep promovendi te danken. Mijn kamergenoot Jacques-Arthur leverde hier ook een belangrijke bijdrage. De omgang met hen heb ik erg plezierig gevonden.

Hedzer Reitsma en Rense Posthumus bedank ik voor hun bereidheid mij in de laatste, rituele fase bij te staan. Tenslotte ben ik dankbaar voor de steun en getoonde belangstelling ook van al mijn andere vrienden, die mij na vandaag nooit meer die vraag: “hoe gaat het met je proefschrift?” hoeven te stellen. Ik kan ze achteraf antwoorden dat het goed ging. Maar ik beloof ze wel dat het bij één proefschrift zal blijven.